



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Πανελλαδικές
Εξετάσεις 2026

Μαθηματικά Προσανατολισμού, Τετάρτη 03 Ιουνίου 2026

Προτεινόμενες λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Δηλαδή η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, ομοίως αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

A3.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A4.

- α) ΛΑΘΟΣ Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- β) ΣΩΣΤΟ
- γ) ΣΩΣΤΟ
- δ) ΣΩΣΤΟ
- ε) ΛΑΘΟΣ Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln(x-1)$

και

$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

B1.

$D_f = (1, +\infty)$ και $D_g = [2, +\infty)$, οπότε:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)\} = \\ &= \{x \geq 2 \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \geq 2 \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\} = \\ &= \{x \geq 2 \text{ και } x-2 > 0\} = \{x \geq 2 \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty). \end{aligned}$$

δηλαδή $D_h = D_{f \circ g} = (2, +\infty)$.

Για $x > 2$ ο τύπος της $f \circ g$ είναι:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ &= 2\ln\sqrt{x-2} = \ln\sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2), \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(x-2), \quad x \in (2, +\infty).$$

B2.

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για κάθε } x > 2,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, άρα και 1-1 στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Για το σύνολο τιμών της h :

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$

Η h είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

δηλαδή:

$$h((2, +\infty)) = (-\infty, +\infty).$$

Έτσι για κάθε $x \in (2, +\infty)$ και $y \in \mathbb{R}$ θέτουμε:

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e^y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = e^y + 2 \Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2, \text{ με } y \in \mathbb{R}$$

ή

$$h^{-1}(x) = e^x + 2, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

B3.

Έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right).$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$, όπως δείξαμε στο ερώτημα B2.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2.$

Τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$, με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

Γ1.

ι)

$$D_f = \mathbb{R}$$

Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa \cdot x)$, με $\kappa \neq 0$, το οποίο είναι άτοπο, διότι:

Αν $\kappa > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ενώ αν $\kappa < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Συνεπώς $\kappa = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η σκέψη ότι για να έχει η f οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\kappa x^3} + \mu x}{\cancel{x^3} + x} = \kappa, \quad \text{άρα } \kappa = 0$$

είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη, καθώς μετά πρέπει να επιβεβαιωθεί ότι όντως για $\kappa = 0$, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

όμως μετά:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ii)

Για $\kappa=0$ είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, με:

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}.$$

Έχοντας την ευθεία $y=x$ εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων, δηλαδή στο σημείο $O(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι ισχύουν:

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad f'(0)=1.$$

Από τη δεύτερη σχέση έχουμε:

$$f'(0)=1 \Leftrightarrow \frac{-\mu \cdot 0^2 + \mu}{(0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Και πάλι Άλγεβρα Β' Λυκείου! Να βρεθεί ο βαθμός πολυωνύμου... $\kappa x^3 + \mu x$, μέσα από όρια στο $+\infty$ της Γ' Λυκείου.

Γ2.

i)

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{με} \quad f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$					
		τοπ. min	τοπ. max		



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Συγκεκριμένα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$. Στη θέση $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{2}$, ενώ στη θέση $x_2 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$.

ii)

- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (άλλωστε η f είναι περιττή).

Συνεπώς:

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, οπότε:

$$f(\Delta_1) = [f(-1), A) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right).$$

- Στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε:

$$f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

- Στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, οπότε:

$$f(\Delta_3) = (B, f(1)] = \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Για την εύρεση του πλήθους των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για κάθε τιμής της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$:

1ος τρόπος

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = \alpha^2.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Η f παρουσιάζει στο 1 ολικό μέγιστο το $\frac{1}{2}$, επομένως ισχύει:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} \leq 0,$$

με το " $=0$ ", να ισχύει μόνο για $x=1$. Επομένως, δεδομένου ότι $\alpha^2 \geq 0$, έχουμε:

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τη $x=1$.

2ος τρόπος

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = \alpha^2.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) - \frac{1}{2}$, προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά $\frac{1}{2}$ μονάδα προς τα κάτω. Έτσι, είτε γραφικά, είτε αλγεβρικά, ισχύει:

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, δεδομένου ότι $\alpha^2 \geq 0$, μόνο για $\alpha = 0$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τη $x=1$.

3ος τρόπος

- Αν $\frac{1}{2} + \alpha^2 \in f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\frac{1}{2} + \alpha^2 \in f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, δηλαδή:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \alpha^2 \leq 0,$$

ισχύει μόνο αν $\alpha = 0$.

- Αν $\frac{1}{2} + \alpha^2 \in f(\Delta_3) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$, δηλαδή:

$$0 < \frac{1}{2} + \alpha^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \alpha^2 \leq 0,$$

τότε και πάλι ισχύει μόνο αν $\alpha = 0$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

4ος τρόπος

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} + \alpha^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right)(x^2+1) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right)x^2 + \frac{1}{2} + \alpha^2 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right)x^2 - x + \frac{1}{2} + \alpha^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right) = 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \alpha^2\right)^2 = 1 - 4 \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 + \alpha^4\right) = \\ &= \cancel{1} - 4\alpha^2 - 4\alpha^4 = -4\alpha^2 - 4\alpha^4 = -4\alpha^2(1 + \alpha^2) \end{aligned}$$

Συνεπώς:

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\Delta < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$, τότε $\Delta = 0$, άρα η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα.

ΣΧΟΛΙΟ

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή θα ήταν να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(x^2+1)^2 = x,$$

που είναι το υποερώτημα (iii) της άσκησης 17.6 στη σελίδα 204 του βιβλίου του σπουδαστηρίου.

Γ3.

i)

- $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$
- $I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx.$

Συνεπώς έχουμε:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{(2v+1)+2}}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} \cdot \cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \\ &= \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} - 0 = \frac{1}{2v+2}, \quad v \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ii)

Γνωρίζοντας ότι

$$I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx \quad \text{και} \quad I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}, \quad v \in \mathbb{N} \quad (1)$$

έχουμε:

- $$I_0 = \int_0^1 \frac{x^{2 \cdot 0 + 1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \\ = \frac{1}{2} [\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

- Από τη σχέση (1) για $v = 0$ προκύπτει ότι:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} \Leftrightarrow I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

- Επίσης από τη σχέση (1) για $v = 1$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{1}{2 \cdot 1 + 2} \Leftrightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \\ &\Leftrightarrow I_2 = \frac{1 - 2(1 - \ln 2)}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}. \end{aligned}$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

2ος τρόπος

Μετά το $I_0 = \frac{\ln 2}{2}$ υπολογίζουμε αυτόνομα, τα υπόλοιπα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_1 &= \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} dx = & \begin{array}{r|l} x^3+0 \cdot x^2+0 \cdot x+0 & x^2+1 \\ -x^3 & -x \\ \hline & -x \end{array} \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - I_0 = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_2 &= \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx = & \begin{array}{r|l} x^5+0 \cdot x^4+0 \cdot x^3+0 \cdot x^2+0 \cdot x+0 & x^2+1 \\ -x^5 & -x^3 \\ \hline & -x^3+0 \cdot x^2+0 \cdot x+0 \\ & x^3 & +x \\ & \hline & x \end{array} \\ &= \int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^3-x)+x}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \left((x^3-x) + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int_0^1 (x^3-x) dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + I_0 = \dots \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ

«Αναγωγικά» ολοκληρώματα... Ναι, είναι άσκηση του σχολικού βιβλίου. Ναι, αλλά με κάποιες άλλες πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπως:

$$\int_a^\beta \eta \mu^v x dx, \int_a^\beta \sigma \upsilon \nu^v x dx, \int_a^\beta \ln^v x dx$$

να είναι εκτός ύλης...

Είναι μια απόφαση στο ίδιο πνεύμα των θεμάτων.

Υπολογισμοί απλοί, γενικότερων γνώσεων. Ακόμα και με διαίρεση πολυωνύμων, λυνόταν, για κάποιον που δεν το είχε ξαναδεί και ξεπερνούσε την «ψαρωτική» εικόνα.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

- $h(-1) = g(-1) - 1$.

Όμως ισχύει:

$$0 < g(x) < 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

οπότε για $x = -1$ έχουμε:

$$0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow -1 < g(-1) - 1 < 0,$$

άρα:

$$g(-1) - 1 < 0 \Leftrightarrow h(-1) < 0.$$

- $h(0) = g(0) + 0 = g(0)$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$0 < g(0) < 1,$$

άρα:

$$g(0) > 0 \Leftrightarrow h(0) > 0.$$

Επομένως ισχύει ότι $h(-1) \cdot h(0) < 0$, οπότε η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-1, 0]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = -x_1.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$h'(x) = g'(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1ος τρόπος

Από την υπόθεση ισχύει ότι:

$$g'(x) \neq -1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) + 1 \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η h' είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (αφού η g έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$), άρα η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή είναι:

$$\text{είτε } h'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είτε } h'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς η h είναι:

$$\text{είτε γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \text{ είτε γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Σε κάθε περίπτωση η h είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Όσοι μαθητές το προσέγγισαν έτσι, ίσως προσπάθησαν να βρουν το πρόσημο της $h'(x)$. Άλλωστε η μονοτονία και το πρόσημο της $h'(x)$ χρειάζεται πιο κάτω στο διάστημα $(-1, 0)$.

2ος τρόπος (το «άτοπο του Rolle»)

Έστω ότι η συνάρτηση h έχει στο διάστημα $(-1, 0)$ και δεύτερη ρίζα $\rho \neq x_1$, για παράδειγμα $-1 < x_1 < \rho < 0$. Τότε έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, \rho]$
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, ρ)
- $h(x_1) = h(\rho) = 0$.

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, \rho)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι ισχύει $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το x_1 είναι η μοναδική ρίζα.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

3ος τρόπος (γενικότερος...)

Αρχικά δείχνουμε ότι $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως στον 1ο τρόπο. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η h είναι 1-1, ακόμα και χωρίς τη συνέχεια της h' . Πράγματι αν για οποιαδήποτε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, με $\kappa \neq \lambda$, ισχύει ότι $g(\kappa) = g(\lambda)$, τότε εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle για την g στο $[\kappa, \lambda]$, οδηγούμαστε και πάλι στο μηδενισμό της h' , το οποίο είναι άτοπο.

Φυσικά η συνεχής και 1-1 συνάρτηση $h(x)$ μπορεί να φτάσει και να αποδειχθεί γνησίως μονότονη, με τη χρήση του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, κάτι το οποίο όμως είναι εκτός διδακτέας ύλης.

ΣΧΟΛΙΟ

Η πληροφορία $g'(x) \neq -1$ του 1ου τρόπου, μαζί με τη συνέχεια της $g'(x)$ υπάρχει για να ανοίξει ο δρόμος της μονοτονίας της συνάρτησης $h(x) = g(x) + x$, που χρειάζεται παρακάτω!

Δ2.

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

- $D_f = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right).$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \in \mathbb{R}.$

- $f(0) = 2\eta\mu 0 + \varepsilon\phi 0 - \kappa \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$

Είναι:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] = 0 \cdot (g(0) + 0) = 0,$$

καθώς η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 0, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0).$

Επίσης:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - \kappa = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \end{aligned}$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Επομένως ισχύει ότι:

$$A = B \Leftrightarrow 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Εδώ για όποιον πέρασε από τη συνέχεια στο 0, αρχικά είδε ότι απλά ισχύει, χωρίς να προσφέρει κάποια πληροφορία.

Δ3.

i)

Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3.$$

1ος τρόπος

Είναι:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Το πρόσημο και ο μηδενισμός της f' εξαρτώνται μόνο από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

και θα περιοριστούμε αργότερα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$, οπότε προκύπτει η μελέτη του πολυωνύμου $2\omega^3 - 3\omega^2 + 1$, το οποίο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 2\omega^3 - 2\omega^2 - \omega^2 + 1 = 2\omega^2(\omega - 1) - (\omega^2 - 1) =$$

$$= 2\omega^2(\omega - 1) - (\omega - 1)(\omega + 1) = (\omega - 1)(2\omega^2 - \omega - 1) =$$

$$= (\omega - 1) \cdot 2\left(\omega + \frac{1}{2}\right)(\omega - 1) = 2 \cdot \left(\omega + \frac{1}{2}\right)(\omega - 1)^2$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ή με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $\omega = 1$:

$$\dots 2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = (\omega - 1)(2\omega^2 - \omega - 1).$$

Επομένως έχουμε:

$$K(x) = 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, διότι, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$0 < \sin x \leq 1,$$

οπότε:

- $\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$, άρα $\sin x + \frac{1}{2} > 0$ και
- $(\sin x - 1)^2 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Τότε όμως θα είναι και $f'(x) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε για κάθε $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

και συνεπώς:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η μελέτη της $f'(x)$ από κάποιον κάνοντας ομώνυμα, έχει σκοπό να «ξεφορτωθεί» το θετικό παρονομαστή και να περιοριστεί στη μελέτη του αριθμητή, πάντα όμως προσαρμοσμένου την ώρα που πρέπει, στο πεδίο ορισμού της f και της f' . Εδώ λοιπόν η $K(x)$ είναι μια παράσταση που αντιμετωπίζεται με Άλγεβρα $A' - B'$ Λυκείου! Είναι ένα σημείο βαρόμετρο. Η δυσκολία μένει χαμηλά, ειδικά σε επίπεδο Δ3. Φανταστείτε να ήταν η $K(x) \dots$ η $2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$!

2ος τρόπος

Και πάλι βρίσκουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = 2\sin x + \frac{1}{\sin^2 x} - 3.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Εδώ ο μαθητής αποφασίζει να μην κάνει ομώνυμα και να διαχειριστεί την $f'(x)$ ως μία «δύσκολη» συνάρτηση.

- Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x) = -2\eta\mu x - \frac{1}{\sin^4 x} \cdot 2\sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x) = -2\eta\mu x + \frac{2\eta\mu x}{\sin^3 x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f''(x) = 2\eta\mu x \left(\frac{1}{\sin^3 x} - 1 \right).$$

Έχοντας $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $2\eta\mu x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$, οπότε το πρόσημο και ο μηδενισμός της f'' εξαρτώνται μόνο από τη συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - 1.$$

Και πάλι λοιπόν βασικές γνώσεις. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$0 < \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu^3 x \leq 1,$$

άρα:

$$\frac{1}{\sin^3 x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^3 x} - 1 \geq 0$$

ή λίγο διαφορετικά:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - 1 = \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^3 x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Lambda(x) = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{\sin^3 x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Σε κάθε περίπτωση είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι:

$$f'(x) \geq f'(0) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

και συνεπώς:

$$f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε για κάθε $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

άρα θα είναι και:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

3ος τρόπος («Αθροιστική» και σίγουρα όχι μια άνετη 1η ιδέα...)

Είναι:

$$f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x \Leftrightarrow f(x) = (2\eta\mu x + \epsilon\phi x) - 3x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Παρατηρούμε ότι $\Lambda(0) = 0$.

Η συνάρτηση $\Lambda(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\Lambda'(x) = 2\sigma\upsilon\eta x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

- Παρατηρούμε ότι $\Lambda'(0) = 3$.

Η συνάρτηση $\Lambda'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\Lambda''(x) = -2\eta\mu x + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ (βλ. 2ο τρόπο).

Επομένως η συνάρτηση $\Lambda(x)$ είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Είναι $\Lambda(0)=0$ και $\Lambda'(0)=3$. Άρα η εφαπτομένη της C_Λ στο σημείο της $\Sigma(0, \Lambda(0))$ έχει εξίσωση:

$$y - \Lambda(0) = \Lambda'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 3x \Leftrightarrow y = 3x.$$

Η συνάρτηση $\Lambda(x)$ είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η C_Λ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $y = 3x$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $\Sigma(0, \Lambda(0))$. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Lambda(x) \geq 3x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως έχουμε ότι:

$$\Lambda(x) - 3x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Τις όποιες ιδέες, σκέψεις που παρουσιάζουμε, προσπαθούμε να είναι κυρίως στα πλαίσια των μαθητών! Ο 3ος τρόπος θα δυσκόλευε πολύ το θέμα, αν ήταν ο μόνος τρόπος! Να μην ξεχνάμε το Δ3 του 2017, όπου σε υπολογισμό εμβαδού, ο μαθητής έπρεπε για να βρει το πρόσημο της συνάρτησης:

$$e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}, \text{ με } x \in [0, \pi],$$

να σκεφτεί ανάλογα.

Επίσης από τον 2ο τρόπο η ίδια $f(x)$ αποδεικνύεται κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, με εφαπτομένη στο 0 τον άξονα $x'x$!

ii)

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Εδώ, έχοντας από πριν την f γνησίως αύξουσα, η πιο άμεση και λογική ιδέα είναι η εύρεση του συνόλου τιμών.

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty.$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty).$$

Το $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2) = \frac{\pi}{3}.$$

Το x_2 μάλιστα είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα και 1-1 στο διάστημα αυτό.

Δ4.

i)

Όπως δείξαμε στο ερώτημα Δ1, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^2(g(x) + x).$$

Περιορίζοντάς την στο $[x_1, 0]$ και επειδή $x^2 \geq 0$, η προσοχή στρέφεται στην:

$$h(x) = g(x) + x,$$

του ερωτήματος Δ1, η οποία κρίθηκε γνησίως μονότονη στο $(-1, 0)$, όταν η:

$$h'(x) = g'(x) + 1$$

έχει σταθερό πρόσημο.

1ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι $h(0) = g(0) > 0$ και $h(x_1) = 0$. Επομένως για $x_1 < 0$, ισχύει $h(x_1) < h(0)$ και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Τότε, για $x_1 \leq x \leq 0$ είναι:

$$h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq h(0),$$

άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

2ος τρόπος

Για όσους ίσως από το Δ1 προσπάθησαν να βρουν το πρόσημο της $h'(x)$:

Η συνάρτηση h πληροί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. στο $[x_1, 0]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{0 - x_1} = \frac{h(0)}{-x_1} = \frac{g(0)}{-x_1} > 0,$$

διότι:

$$g(0) > 0 \quad \text{και} \quad x_1 < 0 \Leftrightarrow -x_1 > 0.$$

Άρα, αφού η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, θα είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε, για $x_1 \leq x \leq 0$ είναι:

$$h(x_1) \leq h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq h(0),$$

άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

Σε κάθε περίπτωση επομένως είναι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$.

ii)

Και αφού τα πρόσημα προετοιμάστηκαν, φτάνουμε στο εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, δηλαδή $x = \frac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Ο άξονας $y'y$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, επομένως ισχύει:

$$\int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx \Leftrightarrow I_1 = I_2.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^0 (x^2 g(x) + x^3)dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x)dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \\ &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \\ &= 0 \cdot g(0) - \frac{x_1^3}{3} g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x)dx + 0 - \frac{x_1^4}{4} = \\ &= -\frac{x_1^3}{3} (-x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \\ &= \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x)dx. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx = \\ &= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - \frac{3}{2} [x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx - \frac{3}{2} [x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2} [x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu 0\right) - \left(\ln\left|\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right| - \ln|\sigma\upsilon\nu 0|\right) - \frac{3}{2} \left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 0\right) = \end{aligned}$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$\begin{aligned} &= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\ln \frac{1}{2} - \ln 1\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-\ln 2 - 0) - \frac{\pi^2}{6} = \\ &= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Όμως, όπως προαναφέραμε ισχύει:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = 3 + 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3. \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα ερώτημα Δ4 (ii) που απευθύνεται, έτσι κι αλλιώς, σε πιο δουλεμένους μαθητές, είναι απλά υπολογιστικό, χωρίς καμία δυσκολία, μακριά από τα αντίστοιχα των τελευταίων ετών. Θα μπορούσε ίσως να ζητηθεί να βρεθεί η κατακόρυφη ευθεία $x = a$, η οποία χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, όμως εδώ ήταν δύσκολο να «κουμπώσει» στη συγκεκριμένη συνάρτηση και τους συγκεκριμένους αριθμούς.

επιμέλεια λύσεων:
Γιάννης Ανδρεάδης
Ηλίας Ντεϊρμεντζίδης